

کتاب شب امتحان حسابان (۲) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

(ب) آزمون طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمون‌هایی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ امتحان‌های نهایی برگزار شده در سال‌های ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۲ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

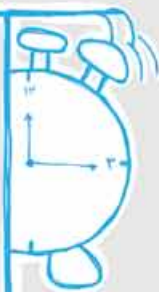
(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ آزمون‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، دی ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۱ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند. در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۱ و خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ هستند.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان حسابان (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۵ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذت‌ش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا سوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

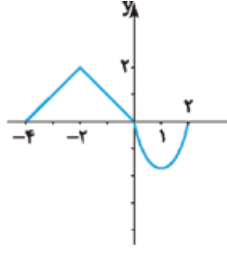
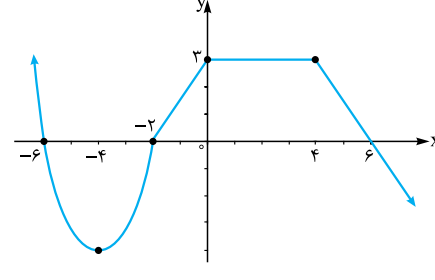


فهرست

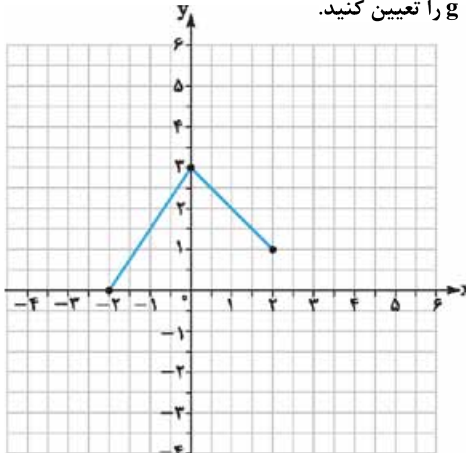
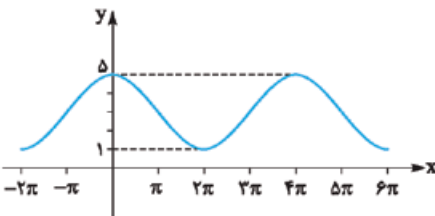
بازم‌بندی درس حسابان (۲)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم	شهریور و دی
اول	۷	۳	۳/۵
دوم	۶	۳	۳
سوم	۷	۳	۳
چهارم	-	۶	۶
پنجم		۵	۴/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

صفحه	صفحه	نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
۲۲	۳	اول	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۱
۲۴	۵	اول	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۲
۲۵	۶	اول	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۳
۲۷	۷	اول	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۴
۲۹	۸	دوم	(طبقه‌بندی شده) نهایی خرداد ۱۴۰۰	آزمون شماره ۵
۳۰	۱۰	دوم	(طبقه‌بندی شده) نهایی شهریور ۱۴۰۰	آزمون شماره ۶
۳۲	۱۲	دوم	(طبقه‌بندی شده) نهایی دی ۱۴۰۰	آزمون شماره ۷
۳۳	۱۳	دوم	(طبقه‌بندی شده) نهایی دی ۱۴۰۱	آزمون شماره ۸
۳۵	۱۵	دوم	(طبقه‌بندی نشده) نهایی خرداد ۱۴۰۱	آزمون شماره ۹
۳۶	۱۷	دوم	(طبقه‌بندی نشده) نهایی خرداد ۱۴۰۲	آزمون شماره ۱۰
۳۷	۱۸	دوم	(طبقه‌بندی نشده) نهایی شهریور ۱۴۰۱	آزمون شماره ۱۱
۳۸	۲۰	دوم	(طبقه‌بندی نشده) نهایی شهریور ۱۴۰۲	آزمون شماره ۱۲
۴۰				درس‌نامه توپ برای شب امتحان

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	حسابان (۲)
نمره	آزمون شماره ۱			ردیف
فصل اول				
۱/۵	ترتیب رسم مرحله به مرحله نمودارها برای این سوال مهمه.		<p>نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است.</p> <p>نمودارهای $y_1 = -2f(x)$ و $y_2 = -f(-\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.</p>	۱
۰/۵	سوال و جواب‌های تک‌کلمه‌ای. یادت باشه برای این سوالات فقط جواب آقر مهمه نه راه‌حل!	$y = \frac{1}{3}f(x+1)$	<p>جاهای خالی را تکمیل کنید.</p> <p>الف) اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی تابع $f(x)$ باشد، پس از انتقال، مختصات نقطه A روی تابع $y = \frac{1}{3}f(x+1)$ برابر است با</p> <p>ب) اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = -3f(x-1)$ برابر است با</p>	۲
۲/۵	رسم تابع f را باید فقط با انتقال‌ها انجام دهید. تابع f^{-1} هم حتماً باید به کمک f رسم شود.		<p>تابع $f(x) = (x+1)^3 - 2$ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) نمودار f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.</p> <p>ب) نشان دهید f وارون‌پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید.</p> <p>پ) ضابطه f^{-1} را بنویسید.</p>	۳
۱	به کلمه «کلید» در صورت سوال توجه کن.		<p>نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر داده شده است. بازه‌هایی که تابع در آن‌ها اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.</p> 	۴
۱/۵	برای نشان‌دارن درستی قسمت اول سوال <u>نباید</u> از عملیات تقسیم استفاده کنی.		<p>نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ بر $2x - 5$ بخش‌پذیر است. سپس مقسوم‌علیه‌های دیگر $f(x)$ را بیابید.</p>	۵
فصل دوم				
۱/۵	این سوال معمولاً در تمامی امتحانات مطرح می‌شود. پس فرمول‌های آن را حفظ کن.	$y = -\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \sqrt{2}$ $y = -2\sin 5x + 3$	<p>دوره تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.</p>	۶
۱	یه وقت اشتباهی ربع‌ها را انتقاب نکنی!		<p>با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را در ربع‌های اول و چهارم با هم مقایسه کنید.</p>	۷
۲	برای قسمت (الف) دقت کن که سینوس برابر یک مقدار منفی می‌شود!	$2\sin x + \sqrt{3} = 0$ $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$	<p>معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.</p>	۸
۱/۵	در این سوال، اصلاً به ضلع سوم مثلث نیازی نیست.		<p>مثلثی با مساحت ۸ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن ۴ و ۸ باشد، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟</p>	۹

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	حسابان (۲)
نمره	نوبت اول پایه دوازدهم دوره متوسطه دوم			ردیف
فصل سوم				
۲/۵	<p>سوال شگیری همیشه در امتحانات مطرح می‌شود. تکنیک‌های شگیری را از درس نامه بشوین.</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi - 4}{x^2 - 3x + 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$ پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{2x - 3}$</p>			۱۰
۱/۵	<p>یادت نره برای موانب قائم، باید شرط‌هایش بررسی بشود.</p> <p>مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$ را به دست آورید.</p>			۱۱
۱/۵	<p>به $\sqrt{x^2}$ توجه کن. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$</p> <p>مجانب‌های افقی تابع روبه‌رو را بیابید.</p>			۱۲
۱/۵	<p>باید نموداری بکشی که همه شرط‌ها را داشته باشه. امتیاجی به ضابطه نمودار نیست.</p> <p>نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که:</p> <p>الف) $f(-1) = f(2) = 0$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$</p> <p>پ) خط $y = 1$ مجانب افقی آن باشد.</p>			۱۳
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید

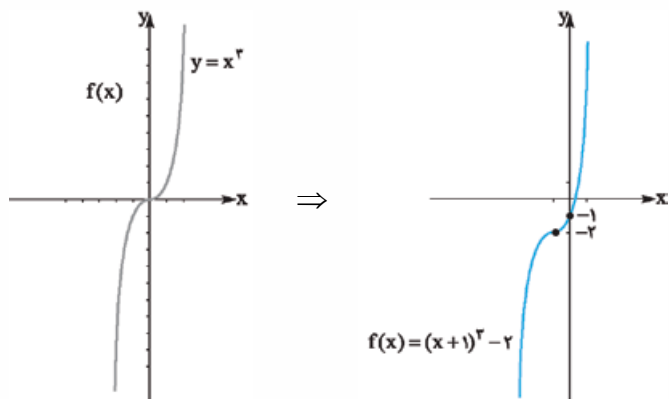
شماره	kheilisabz.com	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	حسابان (۲)
ردیف	آزمون شماره ۹			نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۱
۱	درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را تعیین کنید. الف) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آن‌گاه $f'(a)$ وجود ندارد. ب) هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.			۱
۱	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) دوره تناوب تابع $y = 7 \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) + 2$ برابر است. ب) اگر برای هر x در بازه I ، $f''(x) > 0$ ، آن‌گاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به دارد.			۲
۱	نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید.			۳
				
۱	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.			۴
۰/۵	باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.			۵
۰/۵	اگر $\frac{1}{6} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2} \leq \frac{1}{6}$ ، حدود x را به دست آورید.			۶
۱/۵	معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.			۷
۱	نمودار مقابل مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ است. a ، b و c را مشخص کنید.			۸
				
۱/۵	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.			۹
	الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$	ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^2}{2x - 1}$		
	پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$			
۱/۵	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.			۱۰
۱/۵	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 2x - 4 $ را در $x = 2$ بررسی کنید.			۱۱

شماره	kheilisabz.com	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	حسابان (۲)
نمره	نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۱		آزمون شماره ۹	
۱/۵	برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور x ها معادله خط مماس را بنویسید.			۱۲
۱/۷۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (-3x^2 + x)^5(2x)$ ب) $g(x) = 5 \tan x + \sin x^2$			۱۳
۰/۷۵	اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر باشد، در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟			۱۴
۱/۲۵	اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.			۱۵
۱		<p>با توجه به نمودار داده شده، به سوالات زیر پاسخ دهید:</p> <p>الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.</p> <p>ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.</p> <p>پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.</p> <p>ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.</p>		۱۶
۱/۷۵	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x-2}$ را رسم کنید.			۱۷
۲۰	جمع نمرات		موفق باشید	

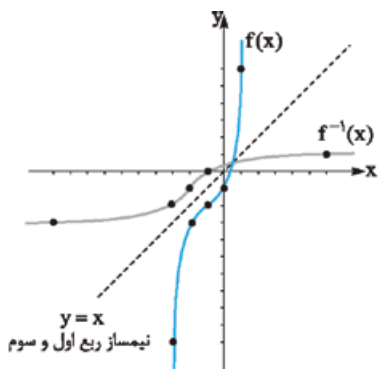
پاسخ‌نامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۳- الف) ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



ب) چون هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک است، بنابراین تابع f وارون‌پذیر است. برای رسم وارون f ، باید نمودار $f(x) = (x+1)^3 - 2$ را نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم:



پ) برای محاسبه ضابطه وارون تابع $f(x) = (x+1)^3 - 2$ ابتدا باید x را تنها کنیم:

$$y = (x+1)^3 - 2 \Rightarrow y+2 = (x+1)^3$$

$$\Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{y+2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+2} - 1$$

جای x و y را عوض می‌کنیم

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$$

۴- طبق نمودار از سمت چپ شروع می‌کنیم.

اکیداً صعودی: $[-4, 0]$ ، اکیداً نزولی: $(-\infty, -4)$

اکیداً نزولی: $[4, +\infty)$ ، تابع ثابت: $[0, 4]$

۵- باید نشان دهیم مقدار $f(x)$ به ازای ریشه $5-2x$ ، برابر صفر است؛ یعنی باید

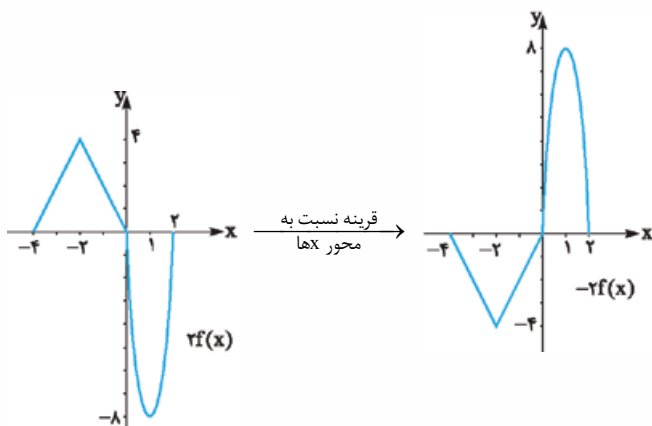
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{5}{2}\right) + 10$$

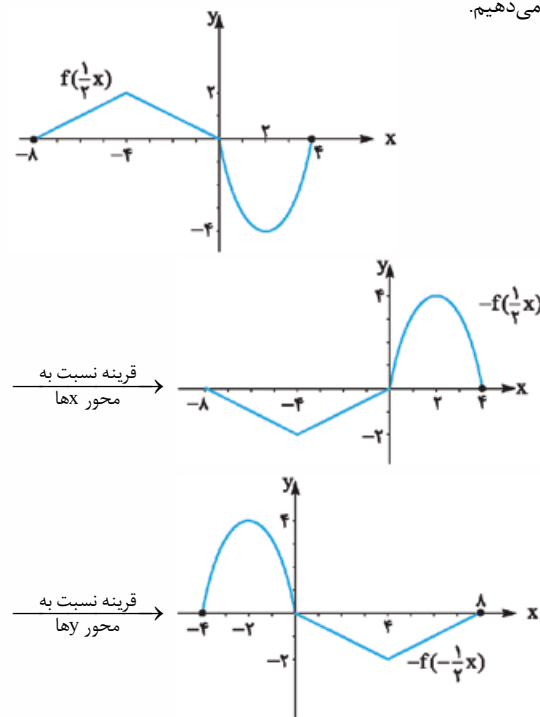
$$= \frac{125}{2} - \frac{75}{2} - \frac{45}{2} + 10 = \frac{125 - 75 - 90 + 40}{2} = 0$$

$$= \frac{165 - 165}{2} = 0 \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

۱- برای رسم نمودار $y_1 = -2f(x)$ ابتدا با توجه به ضریب ۲، یک انبساط عمودی در راستای محور y ها انجام می‌دهیم؛ سپس به علت ضریب منفی نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



برای رسم $y_2 = -f\left(-\frac{1}{4}x\right)$ ابتدا با توجه به ضریب $\frac{1}{4}$ ، یک انبساط افقی در راستای محور x ها انجام می‌دهیم. سپس یک‌بار قرینه نسبت به محور x ها و بار دیگر قرینه نسبت به محور y ها انجام می‌دهیم.



۲- الف) $(-2, \frac{1}{4})$

$A = (-1, 1)$ — x یک واحد به سمت چپ $\rightarrow A' = (-2, 1)$

— y ها انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{4}$ $\rightarrow A'' = (-2, \frac{1}{4})$

$$-1 \leq x - 1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 5 \Rightarrow [0, 5]$$

ب)



۹- مساحت مثلث به کمک دو ضلع و زاویه بین آنها عبارت است از:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \text{ضلع} \times \text{ضلع} \times \sin(\text{زاویه بین دو ضلع})$$

$$8 = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

زاویه بین دو ضلع در مثلث در بازه $0 < \theta < \pi$ قرار می‌گیرد، پس $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{5\pi}{6}$ قابل قبول هستند. یعنی دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

۱۰- الف) صورت کسر فاقد x است. $x = 1$ را فقط در مخرج کسر جای گذاری می‌کنیم:
 $1^2 - 3(1) + 2 = 0$

با تعیین علامت مخرج کسر داریم:

x	۱	۲
$x^2 - 3x + 2$	+	-

$x \rightarrow 1^+$ یعنی حد راست، طبق جدول برای همسایگی راست $x = 1$ ، مقدار

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\pi - 4}{0^-}$$

اما $0 < \pi - 4 < \pi$ ، بنابراین: عدد منفی
 ب) از مثلثات به یاد داریم که:

$$\begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

پس حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ به صورت $\frac{0}{0}$ خواهد بود که باید $+$ یا $-$ بودن مخرج را مشخص کنیم. طبق صورت سؤال، $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ ، پس با مقادیر بیشتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شویم، لذا در ربع دوم دایره مثلثاتی هستیم و در این ربع مقدار $\cos x$ منفی است.

در نتیجه:
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \frac{1}{0^-} = -\infty$

پ) برای عبارت زیر رادیکال داریم:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3} |x|$$

چون $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، پس داخل قدرمطلق مثبت است و می‌توان قدرمطلق را حذف کرد. در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3} |x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3} x}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3} x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۱- مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2$$

چون $x = 2$ و $x = -3$ صورت کسر را صفر نمی‌کنند، حتماً مجانب قائم هستند. برای بررسی دقیق‌تر ابتدا مخرج را تعیین علامت می‌کنیم:

x	-۳	۲
$x^2 + x - 6$	+	-

طبق جدول در همسایگی راست $x = 2$ ، مخرج مثبت است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2 + x - 6} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

طبق جدول در همسایگی چپ $x = 2$ ، مخرج منفی است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2 + x - 6} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

طبق جدول در همسایگی راست $x = -3$ ، مخرج منفی است.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x+1}{x^2 + x - 6} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

طبق جدول در همسایگی چپ $x = -3$ ، مخرج مثبت است.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x+1}{x^2 + x - 6} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

پس $2x - 5$ یک مقسوم‌علیه $f(x)$ است. برای پیدا کردن مقسوم‌علیه‌های دیگر باید $f(x)$ را بر $2x - 5$ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x^2 - 9x + 10 \quad | \quad 2x - 5 \\ -(2x^2 - 5x^2) \\ \hline 2x^2 - 9x + 10 \\ -(2x^2 - 5x) \\ \hline -4x + 10 \\ -(-4x + 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

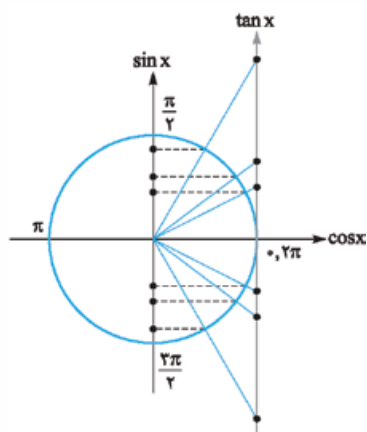
بنابراین: $f(x) = (2x - 5)(x^2 + x - 2) = (2x - 5)(x + 2)(x - 1)$

یعنی $x + 2$ و $x - 1$ مقسوم‌علیه‌های دیگر $f(x)$ هستند.

۶- به طور کلی دوره تناوب تناوب توابعی به فرم $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم $|a| + d$ و مقدار مینیمم $-|a| + d$ است.

الف) $y = -\cos \frac{\pi}{3} x + \sqrt{2}$
 $T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$
 $\max = |-1| + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$
 $\min = -|-1| + \sqrt{2} = -1 + \sqrt{2}$

ب) $y = -2 \sin 5x + 3$
 $T = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5}$
 $\max = |-2| + 3 = 2 + 3 = 5$
 $\min = -|-2| + 3 = -2 + 3 = 1$



۷- دایره مثلثاتی رسم می‌کنیم:
 در ربع اول: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، طبق شکل مشخص است که همواره:

$$\sin \alpha < \tan \alpha$$

در ربع چهارم: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ، طبق شکل مشخص است که همواره:

$$\sin \alpha > \tan \alpha$$

۸- الف) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ ، در نتیجه $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. زاویه‌ای که مقدار سینوس آن $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است را از ربع ۴ انتخاب می‌کنیم. $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

جواب‌های کلی عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{3}) \\ x = (2k+1)\pi - (-\frac{\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

ب) قرار می‌دهیم $\tan x = t$ ، در این صورت: $2t^2 - 3t + 1 = 0$.

مجموع ضرایب برابر صفر است، پس $t = 1$ و $t = \frac{1}{2}$ ؛ در نتیجه:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

اما از معادله $\tan x = \frac{1}{2}$ مقدار زاویه قابل محاسبه نیست. مثلاً اگر β زاویه موردنظر باشد، آن‌گاه $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و در نتیجه: $x = k\pi + \beta, k \in \mathbb{Z}$

۱۲- توجه داریم که:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \end{cases}$$

اکنون حد تابع داده شده را یک بار وقتی $x \rightarrow +\infty$ و بار دیگر وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند، محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

پس $y = \pm 1$ خطوط مجانب افقی تابع هستند.

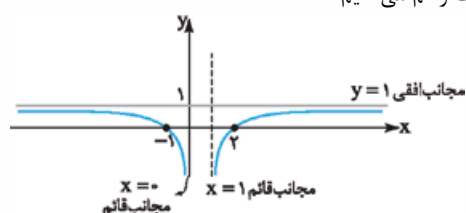
۱۳- طبق (الف)، نقاط $(-1, 0)$ و $(2, 0)$ روی نمودار است؛ یعنی نمودار باید محور x ها را در -1 و 2 قطع کند.

طبق (ب)، خطوط $x = 1$ و $x = 0$ مجانب‌های قائم هستند. برای مجانب قائم $x = 1$ ، در همسایگی راست، مقادیر f به $-\infty$ و برای مجانب قائم $x = 0$ ، در همسایگی چپ، مقادیر f به $-\infty$ میل می‌کند.

طبق (پ)، خط $y = 1$ مجانب افقی تابع f است، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

اکنون نموداری با این اطلاعات رسم می‌کنیم:



$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x} \quad -10$$

مجانِب‌های قائم: $x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$
 اما $x = -1$ ، مجانب قائم نیست، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{x(x+1)} = -2$$

می‌دانیم برای مجانب قائم بودن جواب، حد باید بی‌نهایت شود، نه عدد.

اما $x = 0$ مجانب قائم است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

مجانِب افقی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1$$

۱۱- اولاً تابع $f(x) = |2x-4|$ در $x=2$ پیوسته است.

ثانیاً:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(2x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ ، پس تابع $f(x)$ در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

$x=2$ برای تابع f طول نقطه گوشه‌ای است.

۱۲- ابتدا محل برخورد f با محور x ‌ها را محاسبه می‌کنیم:

محل تقاطع با محور x ‌ها: $(2, 0)$: $y=0 \Rightarrow x^2-8=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2, 0)$

برای محاسبه شیب خط مماس از مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$f'(x) = 2x^2 \stackrel{x=2}{=} 2(2)^2 = 12 \Rightarrow m = 12$$

معادله خط مماس: $y-0 = 12(x-2) \Rightarrow y = 12x - 24$

۱۳- الف) $f'(x) = \Delta(-3x^2 + x)^\Delta (-6x + 1)(2x) + 2(-3x^2 + x)^\Delta$

ب) $g'(x) = \Delta(1 + \tan^2 x) + (2x) \cos x^\Delta$

۱۴- $\text{سرعت متوسط} = 2$

طبق فرض، سرعت متوسط برابر سرعت لحظه‌ای است. $f'(t) = 3t^2 - 1$

۱۵- $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f''(-1) = 0 \end{cases}$

نقطه عطف: $A(-1, 1)$

$f(x) = ax^2 + bx^2 + 2 \quad f'(x) = 2ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 4ax + 2b \quad f(-1) = -a + b + 2 = 1 \Rightarrow -a + b = -1$

$f''(-1) = -4a + 2b = 0$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2(-a-1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a - 2 = 0 \Rightarrow -6a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

۱۶- الف) ۸ ب) ۴ ج) ۲ د) ۱

توجه کنید که نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار نمی‌توانند طول اکستریم‌های نسبی باشند.

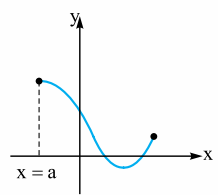
۱۷- $y = \frac{2x-1}{x-2}$

مجانِب قائم: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

مجانِب افقی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y=2$

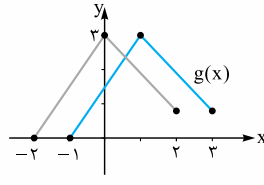
$$y' = \frac{2(x-2) - 1(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
y'	-		-
y	۲		۲
	$-\infty$	$+\infty$	



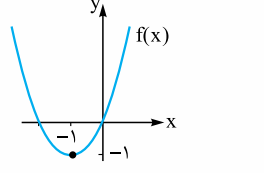
۱- الف) درست
 ب) نادرست، در نمودار مقابل $x=a$ طول نقطه بحرانی است، ولی نقطه اکستریم نسبی نیست.
 نقاط ابتدایی و انتهایی بازه هیچ‌گاه نقاط اکستریم نسبی نیستند.

۲- الف) $y = 2 \sin(-\frac{\pi}{2}x) + 2 \Rightarrow b = -\frac{\pi}{2}, T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$
 ب) بالا



۳- با توجه به ضابطه $g(x) = f(x-1)$ کافی است نمودار اولیه را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم. و با توجه به نمودار g ، دامنه آن برابر است با $[-1, 3]$.

۴- $f(x) = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$



۵- کافی است ریشه عبارت $2x+1$ را در $p(x)$ جای‌گذاری کنیم:
 برای رسم نمودار تابع $f(x)$ ، کافی است نمودار سهمی $y = x^2$ را یک واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت پایین ببریم.
 اکیداً نزولی: $(-\infty, -1]$
 اکیداً صعودی: $[-1, +\infty)$

۶- برای حل معادلات شامل عبارتهای نمایی باید پایه‌ها را با هم برابر کنیم:
 $2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$p(-\frac{1}{2}) = 8(-\frac{1}{2})^3 - 4(-\frac{1}{2})^2 + 2 = 8(-\frac{1}{8}) - 4(\frac{1}{4}) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$
 \Rightarrow باقی‌مانده = 0

۷- می‌دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\sin 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0$
 $\Rightarrow \cos x(2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ که $k \in \mathbb{Z}$ است.

۸- با توجه به شکل $\max = 5, \min = 1$ و دوره تناوب برابر 4π است.

$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 3, |a| = 2, T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$

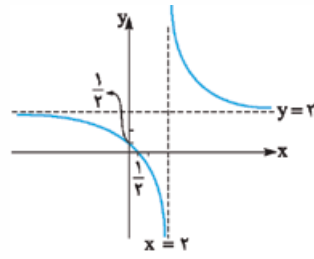
با توجه به شکل، $a > 0$ پس $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$

۹- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-x^2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

پ) می‌توان نوشت: $\frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + (\frac{\sin x}{x})^2$ از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ و

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2} = +\infty + 1 = +\infty$



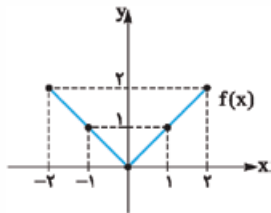
محل تقاطع نمودار با محورها:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

مثال: نمودار تابع $f(x) = |x|$ را با دامنه $[-2, 2]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید. سپس نمودار توابع $g(x) = f(x-1)$ و $h(x) = f(x)-1$ را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

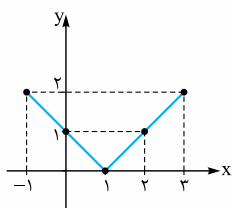


$$f(x) = |x|$$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

$$f \text{ برد} = [0, 2]$$

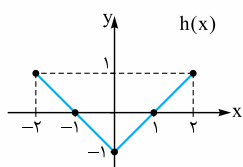
برای رسم تابع $g(x) = f(x-1)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.



$$g \text{ دامنه} = [-1, 3]$$

$$g \text{ برد} = f \text{ برد} = [0, 2]$$

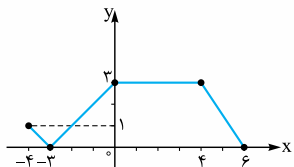
برای رسم تابع $h(x) = f(x)-1$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین در راستای قائم انتقال دهیم.



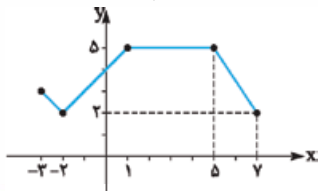
$$h \text{ دامنه} = f \text{ دامنه} = [-2, 2]$$

$$h \text{ برد} = [-1, 1]$$

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y = f(x-1) + 2$ را رسم کنید.



باید نمودار اولیه را دو واحد به سمت بالا در راستای قائم و یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

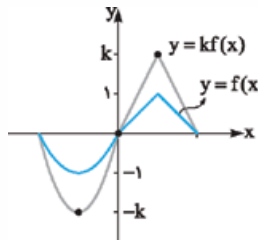


$$\text{دامنه جدید} = [-3, 7]$$

$$\text{برد جدید} = [2, 5]$$

انبساط و انقباض عمودی

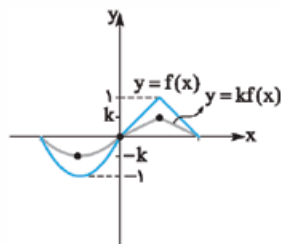
برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، باید عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم.



اگر $k > 1$ باشد، نمودار انبساط عمودی در راستای محور y ‌ها و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار انقباض عمودی در راستای محور y ‌ها دارد.

$$k > 1 \Rightarrow \text{انبساط عمودی داریم}$$

$$0 < k < 1 \Rightarrow \text{انقباض عمودی داریم}$$



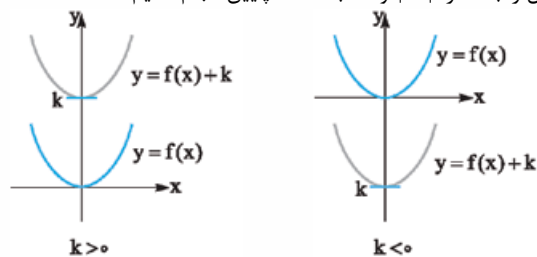
در حالتی که $k = -1$ باشد، نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ‌ها است.

فصل ۱: تابع

درس اول: تبدیل نمودار توابع

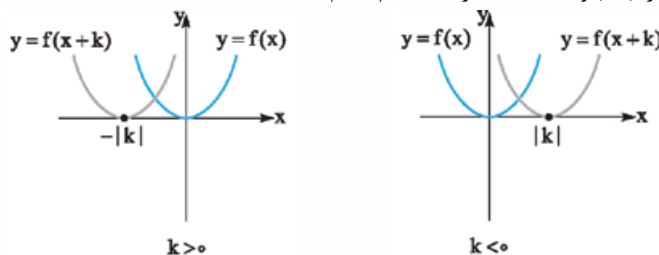
انتقال‌های عمودی و افقی

انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، باید نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا ببریم. اما اگر $k < 0$ باشد، باید این انتقال را به اندازه $|k|$ واحد به سمت پایین انجام دهیم.



نکته: در انتقال عمودی دامنه تابع تغییری نمی‌کند و فقط بُرد آن به اندازه k واحد تغییر می‌کند.

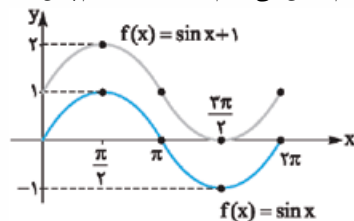
انتقال افقی: برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، باید نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ ببریم. اما اگر $k < 0$ باشد، باید این انتقال را به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام دهیم.



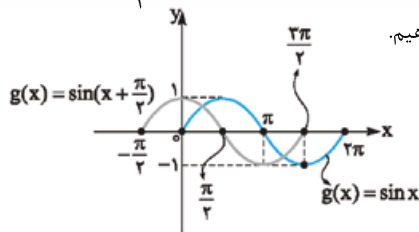
نکته: در انتقال افقی بُرد تابع تغییری نمی‌کند و فقط دامنه آن به اندازه k واحد تغییر می‌کند.

مثال: نمودار توابع $f(x) = \sin x + 1$ و $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ را با توجه به نمودار $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ: برای تابع $f(x) = \sin x + 1$ ، نمودار $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ را یک واحد به سمت بالا در راستای قائم انتقال می‌دهیم. دامنه $f(x)$ همچنان $[0, 2\pi]$ باقی می‌ماند.



برای تابع $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ، نمودار $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت چپ در راستای افقی انتقال می‌دهیم.

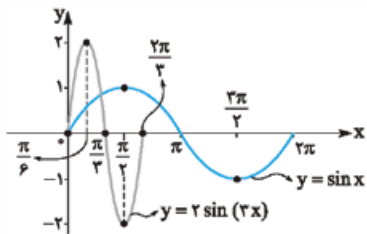


$$D_{g(x)} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

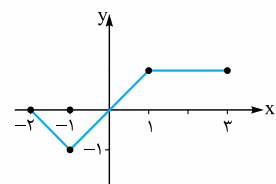


مثال به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ ، نمودار تابع $y = 2 \sin(3x)$ را رسم کنید.

نکته ضریب ۲ باعث می‌شود که نمودار اولیه انبساط عمودی (انبساط در راستای محور



یها) داشته باشد، هم‌چنین ضریب ۳ برای x باعث می‌شود نمودار اولیه انقباض افقی (در راستای محور x) داشته باشد.



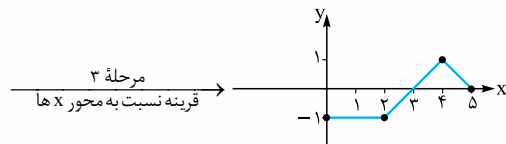
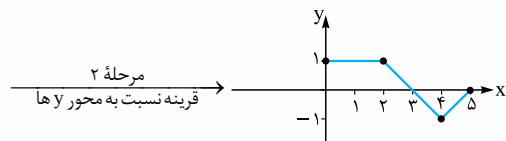
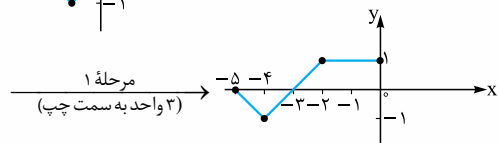
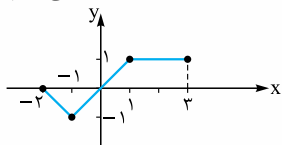
مثال نمودار $f(x)$ در مقابل رسم

شده است. نمودار $y = -f(3-x)$

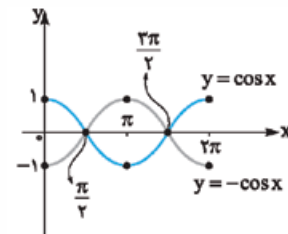
را رسم کنید.

نکته مراحل رسم: ۱- نمودار را ۳ واحد به سمت چپ می‌بریم. ۲- نمودار مرحله ۱ را

نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. ۳- نمودار مرحله ۲ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



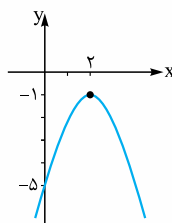
مثال قرینه نمودار تابع $y = \cos x$ را نسبت به محور x ها در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



نکته ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم

می‌کنیم، سپس برای رسم قرینه آن، نسبت به محور x ها یعنی $y = -\cos x$ ، نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مثال نمودار زیر از قرینه‌یابی نسبت به محور x ها و انتقال نمودار تابع $y = x^2$ به



دست آمده است. ضابطه آن را مشخص کنید.

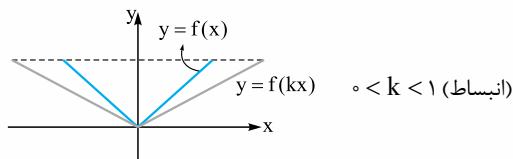
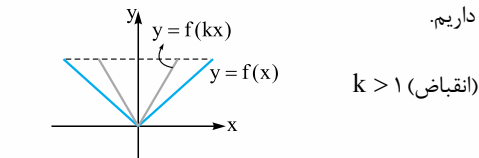
نکته با توجه به نمودار، تابع $y = x^2$ نسبت

به محور x ها قرینه شده، دو واحد به سمت راست و یک واحد پایین آمده است، پس ضابطه‌اش به صورت $y = -(x-2)^2 - 1$ است.

انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، باید طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 1$ باشد، انقباض افقی در راستای محور x ها و اگر $0 < k < 1$ باشد، انبساط افقی در راستای محور x ها داریم.



تذکره نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

تکلیف برای بررسی تابع $g(x) = af(bx+c)+d$ از روی نمودار $f(x)$ ، باید

به ترتیب c (انتقال افقی)، b (انبساط و انقباض افقی)، a (انبساط و انقباض عمودی) و در نهایت d (انتقال عمودی) را انجام دهیم.

مثال نمودار تابع $y = (-x-1)^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

$$y = x^3 \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline y & -1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم کرده، سپس آن را یک واحد به سمت راست می‌بریم و در نهایت آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

